第 48 講　身の回りの数学

48　次の各問いに答えよ．

(1)　楽器の中には弦を振動させて音を出すものがたくさんある．現代のある規約では，弦が１秒あたりに振動する回数（つまり周波数，単位は Hz）により音階が定められている．表はその規約の一例である．

音階	周波数 (Hz)	440 Hz を１としたときの比
ラ	440.0000	1.000000
ラ♯	466.1638	1.059463
シ	493.8833	1.122462
ド	523.2511	1.189207
ド♯	554.3653	1.259921
レ	587.3295	1.334840
レ♯	622.2540	1.414214
ミ	659.2551	1.498307
ファ	698.4565	1.587401
ファ♯	739.9888	1.681793
ソ	783.9909	1.781797
ソ♯	830.6094	1.887749
ラ	880.0000	2.000000

また，弦の材質が均質である場合にはその長さに反比例して周波数（つまり音階）が定まるようになっている．

具体的には，弦の長さが半分になれば，周波数は２倍になり，音階は１オクターブ高い音になる，ということである．また，表のように音が１つずつ高くなる場合には周波数が $\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ 倍になることも知られている．

今，２点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と $\mathrm{A}(1,\ 0)$ の両端に弦が張ってあり，この弦を振動させるとドの音が出るとする．

実数 x は $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすとし，点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ に対し弦 AP を振動させる場合を考え，P が O から出発して A に移動する場合，n 番目のソの音は x がいくつのときになるか求めよ．

ただし，必要であれば，$r=\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ を用いて答えよ．

(2)　炭素 14 のような放射性元素は，さまざまな物質を放出しながら安定な元素に変化している．その変化の仕方は，ある決まった期間（これを半減期という）を経るとその物質の量が半分になるという．例えば，炭素 14 の半減期は約 5730 年であるので，100 g の炭素 14 が密封された容器に入っている場合，5730 年後には炭素 14 が 50 g になり，11460 年後には 25 g になり，残りはすべて窒素 14 に変化するということになっている．

ここで，密封された容器の中にある放射性物質 100 g があり，その半減期が 1000 年で

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

あるとするとき，この物質が 20 g になるのは何年後かを求めよ．ただし，必要であるならば $\log_{10}2=0.3010$ を用い，小数第１位を四捨五入して答えよ．

(3)　空に輝く星までの距離を計測するため，ある星に関して太陽との角度を測ってみた．ある日，地球上のある場所から太陽と星の角度を測ると角度は θ であった．それからちょうど半年後，つまり最初の観測から地球が太陽の反対側に到達したときに同じ場所で太陽と星の角度を測ると $\pi-\theta-\alpha$ であった．地球は，太陽を中心とする半径 R の円周上を動き太陽と星は動かないものとし，最初の観測時の地球と星との距離を d とするとき，d を R，θ，α を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　身の回りの数学

48　平らな広場に建っている塔があり，凛太郎君はその高さを調べようとしている．凛太郎君は広場のある地点から塔の最上部を見上げるとその仰角は α であった．そして，塔と θ の角をなす方向に向かって塔を見上げながら進むと，a m 進んだところで仰角は最大となったという．凛太郎君の目の高さが b m であるとき塔の高さを求めよ．ただし α，θ は鋭角とする．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{\tan\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)　　㋑ $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\theta}a+b$ (m)　　㋒ $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第48講　身の回りの数学

48　次の各問いに答えよ．

(1)　楽器の中には弦を振動させて音を出すものがたくさんある．現代のある規約では，弦が1秒あたりに振動する回数（つまり周波数，単位はHz）により音階が定められている．表はその規約の一例である．

音階	周波数（Hz）	440 Hzを1としたときの比
ラ	440.0000	1.000000
ラ♯	466.1638	1.059463
シ	493.8833	1.122462
ド	523.2511	1.189207
ド♯	554.3653	1.259921
レ	587.3295	1.334840
レ♯	622.2540	1.414214
ミ	659.2551	1.498307
ファ	698.4565	1.587401
ファ♯	739.9888	1.681793
ソ	783.9909	1.781797
ソ♯	830.6094	1.887749
ラ	880.0000	2.000000

また，弦の材質が均質である場合にはその長さに反比例して周波数（つまり音階）が定まるようになっている．

具体的には，弦の長さが半分になれば，周波数は2倍になり，音階は1オクターブ高い音になる，ということである．また，表のように音が1つずつ高くなる場合には周波数が $\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ 倍になることも知られている．

今，2点O(0, 0)とA(1, 0)の両端に弦が張ってあり，この弦を振動させるとドの音が出るとする．

実数 x は $0\leqq x\leqq 1$ を満たすとし，点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ に対し弦APを振動させる場合を考え，PがOから出発してAに移動する場合，n 番目のソの音は x がいくつのときになるか求めよ．

ただし，必要であれば，$r=\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$ を用いて答えよ．

(2)　炭素14のような放射性元素は，さまざまな物質を放出しながら安定な元素に変化している．その変化の仕方は，ある決まった期間（これを半減期という）を経るとその物質の量が半分になるという．例えば，炭素14の半減期は約5730年であるので，100 gの炭素14が密封された容器に入っている場合，5730年後には炭素14が50 gになり，11460年後には25 gになり，残りはすべて窒素14に変化するということになっている．

ここで，密封された容器の中にある放射性物質100 gがあり，その半減期が1000年で

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

あるとするとき，この物質が 20 g になるのは何年後かを求めよ．ただし，必要であるならば $\log_{10} 2=0.3010$ を用い，小数第 1 位を四捨五入して答えよ．

(3)　空に輝く星までの距離を計測するため，ある星に関して太陽との角度を測ってみた．ある日，地球上のある場所から太陽と星の角度を測ると角度は θ であった．それからちょうど半年後，つまり最初の観測から地球が太陽の反対側に到達したときに同じ場所で太陽と星の角度を測ると $\pi-\theta-\alpha$ であった．地球は，太陽を中心とする半径 R の円周上を動き太陽と星は動かないものとし，最初の観測時の地球と星との距離を d とするとき，d を R，θ，α を用いて表せ．

【答】 (1) $1-\dfrac{1}{r^7 2^{n-1}}$　(2) 2322 年後　(3) $d=\dfrac{2R\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha}$

【解答】

(1)　表により，ドからソへは 7 つ音が離れているので，$\mathrm{AP}=\left(\dfrac{1}{r}\right)^7$ ……①となる．また，表により，1 オクターブ高い音は周波数が 2 倍であるので，最初のソの場所から 1 オクターブ高いソまでは長さが半分になっている．よって n 番目のソは①を $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 倍すればよいので $\mathrm{AP}=\left(\dfrac{1}{r}\right)^7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって $x=\mathbf{1-\dfrac{1}{r^7 2^{n-1}}}$

(2)　t 年後の物質の量は $100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}$ となるので $100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}=20$ より $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}=\dfrac{20}{100}$

両辺について底が 10 の対数をとると $\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}=\log_{10}\dfrac{20}{100}$ より

$-\dfrac{t}{1000}\log_{10}2=\log_{10}2-1$

よって $t=\dfrac{1000(1-\log_{10}2)}{\log_{10}2}=\dfrac{1000(1-0.3010)}{0.3010}=2322.2\cdots$

ゆえに **2322 年後**

(3)　最初の観測地点を E，半年後の観測地点を F，ある星を P とすると $\mathrm{EP}=d$，$\mathrm{EF}=2R$，$\angle\mathrm{PEF}=\theta$，$\angle\mathrm{PFE}=\pi-\theta-\alpha$ より正弦定理を用いると $\dfrac{\sin\alpha}{2R}=\dfrac{\sin(\pi-\theta-\alpha)}{d}$

よって $\boldsymbol{d=\dfrac{2R\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　身の回りの数学

48 平らな広場に建っている塔があり，凛太郎君はその高さを調べようとしている．凛太郎君は広場のある地点から塔の最上部を見上げるとその仰角は α であった．そして，塔と θ の角をなす方向に向かって塔を見上げながら進むと，a m 進んだところで仰角は最大となったという．凛太郎君の目の高さが b m であるとき塔の高さを求めよ．ただし α，θ は鋭角とする．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{\tan\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)　㋑ $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\theta}a+b$ (m)　㋒ $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\theta}a+b$ (m)

【答】 ㋑

【解答】

以下，長さや距離の単位を m として，単位を省略する．

塔の高さを h とする．最初に塔を見上げた地点から塔までの距離は $\dfrac{h-b}{\tan\alpha}$ となる．

仰角が最大になる地点は，塔から最も近い地点と考えられるので，その地点から見た塔と最初に見上げた地点との角は 90 度になっているので，$\dfrac{h-b}{\tan\alpha}\cos\theta=a$ が成り立つ．

よって求める高さは $\boldsymbol{h=\dfrac{\tan\alpha}{\cos\theta}a+b}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。